Suites numériques

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2007/2008

Table des matières

En préliminaire au cours :

– Test A page 198 [Déclic] : *Puissances.*
– Test C page 198 [Déclic] : *Évolutions successives.*
– Activité 1 page 199 [Déclic] : *Des chiffres et leur place.*
– Activité 2 page 199 [Déclic] : *Des nombres obtenus par un procédé.*

1 Notion de suite numérique

1.1 Définition

Définition : Une **suite numérique** est une liste indexée de nombres.
Elle a un premier terme, un deuxième terme, etc.

Exemple : Dans l'activité 1 page 199, à chaque entier naturel, on associe un nombre suivant sa place dans la liste donnée. Ainsi :

$u(0) = 8 \qquad u(1) = 6 \qquad u(2) = 9 \qquad u(3) = 2 \qquad u(4) = 2$

Plus généralement, le terme $u(n)$ correspond au $(n-1)^{\text{ième}}$ terme de la liste de nombres donnée.

Remarque : Une suite numérique est donc une fonction qui, à tout entier naturel n, associe un nombre, noté $u(n)$, ou, plus souvent, u_n.

Notations :

– On utilise généralement les lettres u, v, w, ... pour caractériser une suite.
– u_n est appelé terme d'indice n (ou de rang n) de la suite.
– La suite dans sa globalité est notée u ou (u_n).

Remarque : Attention ! Il ne faut pas confondre le terme d'indice n de la suite et le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite. Voir exemple précédent.

Exercices : 11 page 211[1] [Déclic]

1.2 Modes de génération d'une suite

Exemple 1 : A l'aide d'une formule explicite

Soit (u_n) la suit définie par : $u_n = -n^2 + n - 2$.
On a : $u_0 = -0^2 + 0 - 2 = 2$; $u_1 = -1^2 + 1 - 2 = -2$; $u_2 = -2^2 + 2 - 2 = -4$; $u_5 = -5^2 + 5 - 2 = -22$; etc.

Remarque : La suite est donc de la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction.
Pour calculer des termes de la suite, on peut donc utiliser les tableaux de valeurs de la calculatrice.

Exemple 2 : A l'aide d'un procédé

Soit (v_n) la suite de premier terme $v_0 = 5$ et dont le terme suivant est obtenu en ajoutant 3 puis en divisant par 2.
On a : $v_1 = \frac{v_0+3}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$; $v_2 = \frac{v_1+3}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$; $v_3 = \frac{v_2+3}{2} = \frac{\frac{7}{2}+3}{2} = \frac{13}{4}$ et, plus généralement $v_{n+1} = \frac{v_n+3}{2}$.

Remarques :

1. Dans ce cas, le terme d'indice n est calculé à partir du terme précédent. On calcule donc les termes de (v_n) de proche en proche (avant de calculer v_5, il faut déjà avoir calculé v_4, v_3, etc.).
   Une telle relation est appelée formule de récurrence.
2. On notera la suite (v_n) de la façon suivante :
$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{v_n+3}{2} \end{cases}$$
3. On peut aussi utiliser la calculatrice pour calculer les premiers termes de suites définies par récurrence. Voir page 201 [Déclic] pour une explication du procédé.

[1] QCM.

Exercices : 12, 13 page 211[2] – 17, 18 page 211 et 20, 21 page 212[3] – 31 page 212 et 32, 34 page 213[4] – 35, 36 page 213[5] [Déclic]

1.3 Sens de variation d'une suite

Définition :

- Une suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Remarque : On peut aussi définir une suite strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

Propriété 1 : Pour étudier les variations de la suite (u_n), il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

- Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors (u_n) est croissante.
- Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors (u_n) est décroissante.

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$.
   On a :
   $$u_{n+1} = \frac{3}{(n+1)+2} = \frac{3}{n+3}$$
   par suite :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} \\ &= \frac{3(n+2) - 3(n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{3n+6-3n-9}{(n+3)(n+2)} = -\frac{3}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$
   De plus, comme n est un entier positif, $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$.
   Par suite, pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{4^{n+2}}$.
   On a :
   $$v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{4^{(n+1)+2}} = \frac{3^n \times 3^1}{4^{(n+2)+1}} = \frac{3^n \times 3}{4^{n+2} \times 4} = \frac{3^n}{4^{n+2}} \times \frac{3}{4}$$
   par suite :
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{3^n}{4^{n+2}} \times \frac{3}{4} - \frac{3^n}{4^{n+2}} \\ &= \frac{3^n}{4^{n+2}} \left(\frac{3}{4} - 1 \right) \\ &= \frac{3^n}{4^{n+2}} \times \left(-\frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$
   De plus, comme n est un entier positif, $3^n > 0$ et $4^{n+2} > 0$.
   Par suite, pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Exercices : 40 page 213[6] – 22, 23, 25 page 212[7] [Déclic]

[2] QCM – Vrai ou faux.
[3] Calculs de termes à la main ou à la calculatrice.
[4] Détermination d'une formule de récurrence.
[5] Calculs sur les termes d'une suite.
[6] Étude graphique.
[7] Détermination du sens de variation par calcul de $u_{n+1} - u_n$.

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$.
- Si la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse. Voir l'exercice 40 page 213 [Déclic] pour un contre-exemple.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{120}{n+1}$.
On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{120}{x+1}$.
La fonction f s'obtient à partir de la fonction inverse par multiplication par 120 et translation de vecteur $-\overrightarrow{\imath}$. Son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Par suite, f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$. La suite (u_n) est donc décroissante.

Exercice : 26 page 212[8] [Déclic]

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples :

1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, ... est arithmétique de raison 5.
2. La suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$
est arithmétique de raison (-3).
3. La suite des entiers naturels : 0, 1, 2, 3,4, 5, ... est arithmétique de raison 1.
4. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Propriété : Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante pour tout entier n.
Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemples :

1. Soit u la suite définie par $u_n = 3n - 2$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - (3n-2) \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 \end{aligned}$$
La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.
2. Soit v la suite définie par $v_n = n^2$.
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \end{aligned}$$
Le résultat dépend de n, la suite n'est donc pas arithmétique.

[8] Sens de variation d'une suite en utilisant une fonction.

3. Soit w la suite définie par :
$$\begin{cases} w_0 = -1 \\ w_{n+1} = w_n + \sqrt{2} \end{cases}$$
Par définition, la suite est arithmétique de raison $\sqrt{2}$.

Exercices : 42, 43 page 214[9] [Déclic]

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

2.2 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a :

$$u_1 = u_0 + r \qquad u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r \qquad u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :
$$u_n = u_0 + nr$$

Remarques :

1. En particulier, la représentation graphique d'une suite arithmétique est formée de points alignés.
2. Plus généralement, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p + (n - p)\, r$.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison (-2).
On a : $u_n = u_0 + nr = 7 + n \times (-2) = 7 - 2n$.
En particulier : $u_{50} = 7 - 2 \times 50 = 7 - 100 = -93$.

Exercices : 45, 46, 47 page 214[10] – 49 page 214[11] – 56 page 215[12] [Déclic]

2.3 Somme de termes consécutifs

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On note S_n la somme des $(n + 1)$ premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire :
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
Alors, on a :
$$S_n = (n + 1)\, \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

En effet :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & S_n & = & u_0 & + & u_1 & + & u_2 & + & \ldots & + & u_n \\
\oplus & S_n & = & u_n & + & u_{n-1} & + & u_{n-2} & + & \ldots & + & u_0 \\
\hline
 & 2S_n & = & (u_0 + u_n) & + & (u_1 + u_{n-1}) & + & (u_2 + u_{n-2}) & + & \ldots & + & (u_n + u_0)
\end{array}$$

[9] Reconnaissance de suites arithmétiques.
[10] Calculs de termes.
[11] Utilisation de la représentation graphique.
[12] Application concrète.

De plus :

$u_0 + u_n = u_0 + u_0 + nr = 2u_0 + nr$
$u_1 + u_{n-1} = (u_0 + r) + (u_0 + (n-1)\,r) = u_0 + r + u_0 + nr - r = 2u_0 + nr = u_0 + u_n$

et, plus généralement, pour tout k, $u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$.

On a donc :

$$2S_n = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n)}_{(n+1)\text{ termes}}$$

On a donc :

$$2S_n = (n+1)\,(u_0 + u_n)$$

soit, en divisant par 2 :

$$S_n = (n+1)\,\frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

Remarque : Il est plus facile de retenir cette formule sous la forme suivante :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exercices : 50 page 214 et 52, 54, 55 page 215[13] – 58, 61 page 215 et 63 page 216[14] [Déclic]

3 Suites géométriques

3.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q. On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples :

1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, ... est géométrique de raison 2.
2. La suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$$
est arithmétique de raison $\left(-\frac{1}{2}\right)$.
3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison (-1).
4. On augmente tous les ans une quantité de 5%. La suite obtenue est $u_{n+1} = 1,05u_n$. C'est donc une suite géométrique de raison $1,05$.

Propriété : Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante pour tout entier n. Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemples :

1. Soit u la suite définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = 3^{n+3-n-2} = 3$$
La suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5 \times 3^2 = 45$.

[13] Calcul de sommes.
[14] Applications concrètes.

2. Soit v la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}}{\frac{3^n}{4^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}} \times \frac{4^{n+1}}{3^n} = \frac{3^{n+1-n}}{4^{n+2-n-1}} = \frac{3}{4}$$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3^0}{4^1} = \frac{1}{4}$.

Exercices : 67, 69 page 216[15] [Déclic]

> **Théorème :** Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 positif.
> - Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
> - Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

3.2 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a :

$u_1 = u_0 \times q$ $\quad$ $u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2$ $\quad$ $u_3 = u_2 \times q = \left(u_0 \times q^2\right) \times q = u_0 \times q^3$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

> **Théorème :** Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors :
>
> $$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite géométrique de raison q et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
On a : $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$.
En particulier : $u_{10} = 3 \times 2^{10} = 3072$.

Exercices : 64, 65 page 216[16] – 70, 71 page 216[17] [Déclic]

3.3 Somme de termes consécutifs

> **Théorème :** Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (avec $q \neq 1$). On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire :
>
> $$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
>
> Alors, on a :
>
> $$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

En effet, si on note $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$:

$$\begin{array}{crcccccccccccc} & S & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & & \\ \ominus & qS & = & & & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & + & q^{n+1} \\ \hline & S - qS & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & \left(-q^{n+1}\right) \end{array}$$

15. Reconnaissance de suites géométriques.
16. Calculs de termes.
17. Applications concrètes.

On a donc :

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 - q^{n+1} \\ (1-q)\,S &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

et, comme $q \neq 1$, $1 - q \neq 0$. D'où :

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

De plus :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^n \\ &= u_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) \\ &= u_0 \times S \end{aligned}$$

Par suite :

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il est plus facile de retenir cette formule sous la forme suivante :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exercices : 75, 76, 78 page 217[18] – 72 page 216 et 73, 79, 81, 82 page 217[19] [Déclic]

Exercices de synthèse : 89, 90 page 218[20] – 91, 92, 94 page 219[21] – 97 page 219 et 102, 104, 105 page 220[22] [Déclic]

Références

[Déclic] Déclic 1re ES, Hachette éducation (édition 2005)

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

[18] Calcul de sommes.
[19] Applications concrètes.
[20] Comparaison de suites.
[21] Placements à intérêts simples ou composés.
[22] Applications.